

Localización de conjuntos compactos invariantes de sistemas físicos y electromecánicos y sus aplicaciones

Luis Nestor Coria de los Rios y Konstantin E. Starkov

Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, Instituto Politécnico Nacional
Ave. del Parque 1310, Mesa de Otay, Tijuana, B.C.,
México

luis.coria@gmail.com, konst@citedi.mx

Resumen. Con la localización de conjuntos compactos invariantes se pretende entender la dinámica a largo plazo de un sistema caótico. En esta investigación se aplica el método de localización por medio de condiciones de extrema y el teorema iterativo para estudiar la dinámica de un modelo de un motor síncrono de imán permanente (PMSM). De esta forma, se determina una localización dada por un elipsoide que es cortada por un paraboloides elíptico y un cilindro. Para los resultados obtenidos se realizan simulaciones numéricas en las que se observan las superficies de localización respecto al atractor caótico del sistema en estudio. Los resultados son contribuciones útiles en el análisis de la dinámica compleja de los sistemas estudiados. La aplicación de resultados de localización corresponde al diseño de dos observadores de Thau para el PMSM.

Palabras clave. Caos, conjuntos compactos invariantes, sistema electromecánico, motor síncrono de imán permanente.

Localization of Compact Invariant Sets of Physical and Electromechanical Systems and their Applications¹

Abstract. Localization of compact invariant sets allows understanding the long-time behavior of a chaotic system. In this paper we apply the solution of the conditional extremum problem to the study of a model of a permanent magnet synchronous motor. The localization set is given by a one-parameter set of ellipsoids, crossed by an elliptical paraboloid and a cylinder. This improves the initial ellipsoidal localization. Numerical simulations are made to show the

Resumen extendido de tesis doctoral. Graduado: Luis N. Coria. Director: Konstantin E. Starkov. Fecha de graduación: 18/03/2010
Extended abstract of PhD thesis. Graduated: Luis N. Coria. Advisor: Konstantin E. Starkov. Graduation date: 18/03/2010.

effectiveness of the method. The results are useful for analyzing the complex behavior of the systems under study. The application of the localization results corresponds to the design of two Thau observers for the PMSM.

Keywords. Chaos, compact invariant set, electromechanical system, permanent magnet synchronous motor.

1 Introducción

Durante las últimas décadas la investigación del comportamiento de sistemas caóticos ha presentado un reto científico que se ha atacado desde diferentes ángulos. En este resumen de tesis doctoral se presentan resultados del análisis de sistemas caóticos por medio del método de localización de conjuntos compactos invariantes. La solución del problema de localización se basa en el estudio de condiciones de extrema de primer orden y el uso del teorema iterativo. Las técnicas utilizadas para este análisis han sido desarrolladas y mejoradas por A. Krishchenko y K. Starkov en los últimos años [8, 8]. El resto del presente trabajo se organiza de la siguiente manera. La Sección 2 contiene las herramientas matemáticas básicas necesarias para la solución del problema de localización, además de los teoremas formulados por A. Krishchenko y K. Starkov para este fin. En la Sección 3 se estudian modelos matemáticos de motores síncronos de imán permanente (PMSM). Los resultados de localización obtenidos para el modelo del PMSM son utilizados para el diseño de observadores de Thau, ello se presenta en la Sección 4. Las conclusiones se encuentran en la Sección 5.

2 Preliminares y notaciones

En esta Sección se presentan conceptos básicos para la comprensión de los desarrollos matemáticos, así como los teoremas, definiciones y herramientas matemáticas que se utilizarán para la solución del problema de localización de conjuntos compactos invariantes.

2.1 Representación de estados

Un sistema dinámico se representa por medio de ecuaciones diferenciales con la finalidad de ser analizado matemáticamente. Una forma general de representar un sistema dinámico es por un número finito n de ecuaciones diferenciales de primer orden, que se conoce como representación de estados [24].

Bajo esta representación el sistema es autónomo o invariante en el tiempo, ya que el sistema no depende explícitamente del tiempo [6] y puede escribirse de manera general como:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

2.2 Conjunto compacto invariante

La presencia de conjuntos compactos invariantes y su localización son de vital importancia en el análisis de sistemas no lineales. Algunos conjuntos compactos invariantes son [16]:

- Puntos de Equilibrio.
- Órbitas Periódicas.
- Ciclos Límite.
- Órbitas Homoclínicas.
- Órbitas Heteroclínicas.
- Atractores Caóticos.

2.3 Sistema caótico

Aunque no hay una definición formal de caos, la siguiente engloba todas las características que definen a un sistema caótico como tal [24]:

“Un sistema caótico es un sistema no lineal determinístico con comportamiento no periódico a largo plazo, muy sensible a las condiciones iniciales.”

2.4 Localización de conjuntos compactos invariantes

El concepto de Localización de Conjuntos Compactos Invariantes se usa para definir la región del espacio de estados donde se encuentran localizados todos conjuntos compactos invariantes que se presentan bajo ciertas condiciones en algún sistema en específico, la importancia de ello radica en que éste análisis es útil para el conocimiento de la dinámica en largo plazo del sistema.

Por lo general, la solución de este problema en sistemas caóticos se realiza por medios numéricos, pero ello no garantiza la existencia de conjuntos compactos invariantes, debido a que en la práctica no pueden ser medidas con exactitud las condiciones iniciales. En una simulación numérica este problema no es considerado y ello afecta los resultados por las características propias de un sistema caótico, en ello radica la importancia de la resolución analítica del problema de localización.

El método empleado para la solución del problema fue desarrollado por el A. Krishchenko en 1997 [7]. La propuesta de A. Krishchenko ha sido mejorada en conjunto con el K. Starkov durante los últimos años [8, 11, 22], además se ha resuelto el problema de localización para algunos sistemas [9, 10, 17, 19, 20 23].

2.4.1 Teorema general de localización de conjuntos compactos invariantes

Considerando el sistema no lineal (1) donde f es un C^∞ -campo vectorial diferenciable; $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados. Sea $h(x)$ una C^∞ -función diferenciable en la cual h no es la primera integral de (1). Por $h|_B$ se denota la restricción de h en un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$. Por $S(h)$ se denota el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_f h(x) = 0\}$. Ahora se definen:

$$h_{\inf} := \inf\{h(x) \mid x \in S(h)\};$$

$$h_{\sup} := \sup\{h(x) \mid x \in S(h)\}.$$

Teorema 1. *Cada conjunto compacto invariante Γ de (1) está contenido en el conjunto de localización $K(h) = \{h_{\inf} \leq h(x) \leq h_{\sup}\}$.*

Si se considera la localización de todos los conjuntos compactos invariantes dentro del dominio $U \subset \mathbb{R}^n$, se tiene el conjunto de localización $K(h) \cap U$, con $K(h)$ definida en el Teorema 1.

La función h usada en la declaración de este teorema es llamada función localizadora. Además, si todos los conjuntos compactos invariantes están localizados en los conjuntos Q_1 y Q_2 , $Q_1; Q_2 \subset \mathbb{R}^n$, entonces estarán localizados también en el conjunto $Q_1 \cap Q_2$.

3 Localización de conjuntos compactos invariantes para sistemas electromecánicos

Durante los últimos años se han realizado diferentes estudios para investigar las propiedades dinámicas de motores síncronos de imán permanente (PMSM), se puede consultar el artículo [12], además están los artículos [3, 4], entre otros. Se ha logrado un notable progreso en el análisis de estos modelos, a pesar de la complejidad matemática que ello representa. Un análisis de bifurcaciones y condiciones de estabilidad para el sistema se puede encontrar en los artículos [2, 5, 13], donde simulaciones numéricas muestran dinámicas complejas para estos modelos.

Las implementaciones prácticas de controladores para el PMSM, cuando presenta caos, pretenden resolver problemas como la estabilización de la dinámica del motor en regiones de operación en las que actualmente no es considerada su utilización, como pueden ser altas velocidades o niveles bajos de flujo magnético, así como la eliminación del caos cuando se presenta en ciertas regiones de operación. En este respecto se propone la utilización de técnicas no lineales para la solución de problemas que requieren del conocimiento de la dinámica global del modelo dinámico, vea las referencias ya mencionadas.

Recientemente se ha realizado investigación respecto a la localización de dominios que contienen todos los conjuntos compactos invariantes para sistemas no lineales que poseen dinámica compleja, con especial énfasis en

modelos dinámicos que presentan caos, [9, 10, 17, 18, 19]. En estos artículos se encontró la región donde se localizan los conjuntos compactos invariantes para cada uno de los diferentes modelos matemáticos, cuyos resultados no son solamente teóricos, ya que pueden emplearse para el diseño de observadores y controladores no lineales, así como la localización numérica de atractores caóticos. La idea de la aplicación de un elipsoide que contiene los conjuntos compactos invariantes de un sistema es aplicada eficientemente para el diseño de observadores y controladores, como se puede consultar en [14, 16, 25].

3.1 Modelos del motor síncrono de imán permanente

En esta sección se presentan tres modelos Motores Síncronos de Imán Permanente que fueron tomados del artículo [2], donde fue presentado un análisis del comportamiento caótico del motor bajo ciertas condiciones.

3.1.1 Modelo de un motor síncrono de imán permanente

Este modelo representa el comportamiento de un Motor Síncrono de Imán Permanente, y es la simplificación del que se muestra en el libro [1] y está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -bx + yz; \\ \dot{y} &= -y - xz + cz; \\ \dot{z} &= a(\gamma ky - z) + \xi xy\end{aligned}\quad (2)$$

En estas ecuaciones x , y son las correspondientes transformaciones de las corrientes en el estator y z es la transformación de la velocidad angular del motor. Para simplicidad se toma $\xi = \eta k^2$. Este modelo también fue estudiado por Jing *et al.* [5] con la idea de analizar bifurcaciones.

Los parámetros del modelo están dados por:

$$\begin{aligned}a &= \frac{B_m}{J}; \quad b = \frac{L_{qs}}{L_{ds}}; \quad c = \frac{\psi_a}{kL_{qs}}; \\ \eta &= \frac{3n_p^2(L_{ds} - L_{qs})b\tau^2}{2J}; \quad \gamma = \frac{n_p\tau\mu}{B_m}.\end{aligned}$$

donde:

B_{rn} = Coeficiente de Fricción Viscosa

J = Inercia del Rotor

τ = Constante de transformación en el tiempo

L_{qs} y L_{ds} = Inductancias del Estator

ψ_a = Flujo del Imán Permanente

k = Constante Positiva

n_p = Número de pares polares

μ = Constante Positiva

Además: $T_m - T_{pm} = \mu i_{qs}$ y $T_{pm} = \frac{3}{2} n_p \psi_a i_{qs}$.

3.1.2 Modelo de un motor síncrono de imán permanente del tipo magneto interior

En este caso el imán permanente está incrustado en el rotor, como se muestra en los artículos [2, 5]. Este sistema es un caso especial del sistema (2), con los parámetros $\xi = 1$, $\gamma = 0$. Las ecuaciones correspondientes están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -bx + yz; \\ \dot{y} &= -y - xz + cz; \\ \dot{z} &= xy - az. \end{aligned} \quad (3)$$

3.1.3 Modelo de un motor síncrono de imán permanente del tipo superficie magnética

En este tipo de motor, los imanes permanentes se montan en la superficie de rotor. Este modelo es un caso especial del sistema (2), con los parámetros $k = \frac{1}{\gamma}$, $\eta = 0$. La representación de estados correspondiente está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -bx + yz; \\ \dot{y} &= -y - xz + cz; \\ \dot{z} &= a(y - z). \end{aligned} \quad (4)$$

En este sentido se puede observar que el sistema (2) es similar al sistema de Lorenz y al modelo de la amplitud de plasma. Detalles de localización para estos sistemas se muestran en [16].

3.2 Análisis de localización para el modelo general de un motor síncrono de imán permanente (2)

En esta sección se describen los resultados de la aplicación del método de localización para el modelo del PMSM. Se muestran las regiones de localización dadas por elipsoides y sus refinamientos, además de algunas funciones adicionales que mejoran dichas regiones.

3.2.1 Localización elipsoidal

En primer término se establece una localización elipsoidal para el modelo (2). La localización elipsoidal depende de que $h_{1\text{sup}}(p)$ exista y se resuelva el problema de condiciones de extrema $\max\{h \mid (x, y, z)^T \in S(h_1; p)\}$, entonces,

$$K(h_1; p) := \left\{ p \left(x - \frac{\beta_2}{p} \right)^2 + \beta_1 y^2 + z^2 \leq \frac{\beta_2^2}{p} + h_{1\text{sup}}(p) \right\}$$

es el conjunto de localización. En el siguiente apartado se muestra un resumen de los $h_{1\text{sup}}$ y ello conlleva a un refinamiento de la localización por medio de una familia de elipsoides $K(h_1; p)$, debido al parámetro libre p , que aparece en la función localizadora.

3.2.2 Puntos estacionarios

Los puntos estacionarios con los cuales se obtiene el valor de $h_{1\text{sup}}(p)$, se calcularon por medio de la función de Lagrange

$$\mathbb{L}(x, \mu) = h_1(x) + \mu \frac{L_f h_1}{2}.$$

El valor de extrema $h_{1\text{sup}}(p)$ es igual al máximo valor de h_1 , de los obtenidos como solución de la función de Lagrange. Para resumir se tiene:

$$h_{1\text{sup}}(p) = \left\{ \begin{array}{l} h_1(A_2) = 0, \text{ si } b < 2 \min(a, 1); \\ h_1(A_3), \quad \text{ si } a \geq 1; b \geq 2a \\ \quad \text{ o si } 2a > b \geq 2; \\ h_1(A_4), \quad \text{ si } a < 1; b > 2 \\ \quad \text{ o si } 2 > b \geq 2a; \end{array} \right\}. \quad (5)$$

3.2.3 Refinamiento de las localizaciones elipsoidales, con el cálculo de sus intersecciones

Ahora se calcula el conjunto de localización:

$$K(h_1) := \cap_{p>0} K(h_1; p),$$

con el uso de propiedades de polinomios cuadráticos.

Con ello en mente se obtienen tres casos dados por (5).

Caso 1: $h_{1\text{sup}} = h_1(A_2)$.

A partir de ello se encuentra $K(h_1) = K(h_{11}) \cap K(h_{12})$, con:

$$\begin{aligned} K(h_{11}) &= \{x^2 + y^2 - 2cx \leq 0\}, \\ K(h_{12}) &= \{\xi y^2 + z^2 - 2x(c\xi + a) \leq 0\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Caso 2: $h_{1\text{inf}}(p) = h_1(A_3)$.

Asignando las siguientes variables:

$$\alpha_1 = ak\gamma + c\xi, \eta_1 = \frac{(b-2)^2}{4(b-1)}. \tag{7}$$

Entonces:

$$K(h_1; p) = \left\{ \begin{aligned} &p^2(x^2 - 2cx + y^2 - c^2\eta_1) \\ &+ (\xi y^2 + z^2 - 2x(c\xi + a) - 2c\alpha_1\eta_1)p \\ &- \alpha_1^2\eta_1 \leq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Ahora se asignan:

$$\begin{aligned} A(\eta_1) &= -\alpha_1^2\eta_1; \\ B(\eta_1) &= \xi y^2 + z^2 - 2x(c\xi + a) - 2c\alpha_1\eta_1; \\ C(\eta_1) &= x^2 - 2cx + y^2 - c^2\eta_1. \end{aligned}$$

Mientras, $A(\eta_1) < 0$, debe notarse que:

$$K(h_1) = \left\{ \bigcup_{s=1}^3 \Omega_s \right\};$$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &: = \{C = 0, B \leq 0\}, \\ \Omega_2 &: = \{C < 0, B^2 < 4A(\eta_1)C\}, \\ \Omega_3 &: = \{C < 0, B < 0, B^2 \geq 4A(\eta_1)C\}. \end{aligned}$$

Caso 3: $h_{1\text{inf}} = h_1(A_4)$.

De forma similar se obtiene:

$$K(h_1; p) = \left\{ \begin{aligned} &px^2 - 2(a + c(p + \xi))x \\ &+ (p + \xi)y^2 + z^2 \leq \frac{(a + cp + c\xi)^2(b-2a)^2}{4p(b-a)} \end{aligned} \right\};$$

cuyas notaciones son:

$$\alpha_1 = a + c\xi, \eta_2 = \frac{(b-2a)^2}{4(b-a)}.$$

$K(h_1; p)$ puede reescribirse como:

$$K(h_1; p) = \left\{ \begin{aligned} &p^2(x^2 - 2cx + y^2 - c^2\eta_2) \\ &+ (\xi y^2 + z^2 - 2x(c\xi + a) - 2c\alpha_1\eta_1)p \\ &- \alpha_1^2\eta_2 \leq 0 \end{aligned} \right\};$$

donde, $A(\eta_2) = -\alpha_1^2\eta_2$. Mientras, $A(\eta_2) < 0$, se tendrá: $K(h_1) = \left\{ \bigcup_{s=1}^3 \Omega_s \right\};$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &: = \{C = 0, B \leq 0\}, \\ \Omega_2 &: = \{C < 0, B^2 < 4A(\eta_2)C\}, \\ \Omega_3 &: = \{C < 0, B < 0, B^2 \geq 4A(\eta_2)C\}. \end{aligned}$$

3.3 Funciones localizadoras adicionales

Se encontraron algunas localizaciones adicionales $K(h_2), K(h_3), K(h_4)$.

3.3.1 Cilindro elíptico $K(h_2)$

Si $b < 1$, el conjunto de localización está dado por:

$$K(h_2) = \left\{ x^2 + y^2 - 2cx \geq -\frac{c^2(b-2)^2}{4(1-b)} \right\};$$

y, si $b > 1$:

$$K(h_2) = \left\{ x^2 + y^2 - 2cx \leq -\frac{c^2(b-2)^2}{4(1-b)} \right\}.$$

En ambos casos la localización está definida por un cilindro elíptico.

3.3.2 Paraboloide elíptico $K(h_3)$

Si $b < 2 \min(1, a)$, el conjunto de localización es:

$$K(h_3) = \{ \xi y^2 + z^2 - 2(a + c\xi)x \leq 0 \};$$

y, si $b > 2 \max(1, a)$, entonces el conjunto de localización es:

$$K(h_3) = \{ \xi y^2 + z^2 - 2(ak\gamma + c\xi)x \geq 0 \}.$$

3.3.3 Cilindro hiperbólico $K(h_4)$

Si $b < a$, el conjunto de localización es:

$$K(h_4) = \left\{ x^2 - \frac{1}{\xi}z^2 + \frac{2a}{\xi}x \geq -\frac{a(2a-b)^2}{4\xi^2(a-b)} \right\};$$

sin embargo, si $b > a$, el conjunto de localización está dado por:

$$K(h_4) = \left\{ x^2 - \frac{1}{\xi}z^2 + \frac{2a}{\xi}x \leq -\frac{a(2a-b)^2}{4\xi^2(a-b)} \right\}.$$

En este caso, $K(h_4)$ representa un cilindro hiperbólico.

3.3.4 Teorema para las localizaciones obtenidas para el sistema del PMSM

Dado el análisis de localización para el sistema (2), se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 2. *Todos los conjuntos compactos invariantes del sistema (2) están contenidos en cada uno de los conjuntos $K(h_j)$, $j = 1, \dots, 4$, si se cumplen las condiciones que garantizan su existencia.*

3.4 Localización para el modelo de un motor síncrono de imán permanente del tipo magneto interior (3)

En el caso del modelo del tipo Magneto Interior (3) todas las localizaciones descritas para el modelo general (2) son válidas, exceptuando $K(h_4)$, en vez de esta localización, se encuentra una adicional para este sistema dada por:

Si $a < b$, el conjunto de localización es:

$$K(h_5) = \{ x^2 - z^2 \leq 0 \}.$$

Si $a > 1$, entonces:

$$K(h_5) = \{ x^2 - z^2 \geq 0 \}.$$

Si $a = 1$, entonces:

$$K(h_5) = \{ x^2 - z^2 = 0 \}.$$

3.5 Localización para el modelo de un motor síncrono de imán permanente del tipo superficie magnética (4)

Al igual que en el caso anterior, todas las localizaciones para el modelo general son válidas si se toma $\xi = 0$ y $k = 1$. Es importante mencionar que después de un cambio de coordenadas, $z \rightarrow x$; $x \rightarrow z$; $y \rightarrow y$; el sistema (4) se convierte en el sistema de Lorenz, por lo tanto, los resultados obtenidos por Krishchenko y Starkov en [8] son válidas para este caso específico y los detalles pueden consultarse en ese artículo.

3.6 Simulación numérica para el modelo general de un PMSM (2)

En esta sección se presentan resultados de simulaciones numéricas que ilustran como se localizarán atractores caóticos, para el sistema (2). En el artículo [5], el sistema (2) presenta caos con los parámetros: $a = 42.128$; $b = 0.7333$; $c = 164.78$; $\xi = 6.8172 \times 10^{-2}$; por lo que los valores extremos, $h_{1\text{sup}} = h_{1\text{sup}}(A_2) = 0$, y el conjunto de localización está dado por el dominio compacto, $K(h_1) = K(h_{11}) \cap K(h_{12})$, con:

$$K(h_{11}) = \{ x^2 + y^2 - 2cx \leq 0 \},$$

$$K(h_{12}) = \{ \xi y^2 + z^2 - 2x(c\xi + ak\gamma) \leq 0 \}.$$

En la Figura 1 se muestra el atractor caótico que se mostró en el artículo [5], y las localizaciones $K(h_1) = K(h_{11}) \cap K(h_{12})$.

3.7 Simulación numérica para el PMSM tipo Magneto Interior (3)

En esta sección se muestran simulaciones numéricas para el sistema (3), obteniendo los parámetros del artículo [3] dados por: $a = 3.7080$; $b = 0.84$; $c = 7.961$.

Para estos valores de parámetros se cumple el Caso 4 de los puntos estacionarios, por lo que

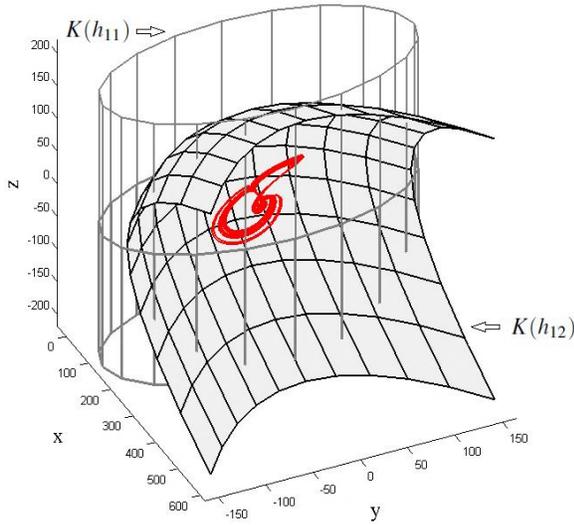


Fig. 1. Atractor caótico para el modelo general de un PMSM delimitado por su conjunto de localización

$h_{1\text{sup}}(A_2) = 0$, y el caso 1 de intersección de elipsoides, por lo que se tiene una superficie compacta de localización dada por:

$$K(h_1) = K(h_{11}) \cap K(h_{12}),$$

donde,

$$K(h_{11}) = \{x^2 + y^2 - 2cx \leq 0\};$$

$$K(h_{12}) = \{y^2 + z^2 - 2cx \leq 0\}.$$

Además, se cumplen las condiciones para la localización $K(h_4) = \{x^2 - z^2 \geq 0\}$, que corresponde a la superficie de dos planos intersectados.

La Figura 2, muestra la vista del conjunto de localización correspondiente a la superficie, $K(h_1) \cap K(h_4)$, que encierra al atractor caótico.

4 Diseño de un observador de Thau para el PMSM basándose en la localización de conjuntos compactos invariantes

En esta sección se diseña un observador para el PMSM, utilizando la información de los límites del dominio de Localización obtenidos en el

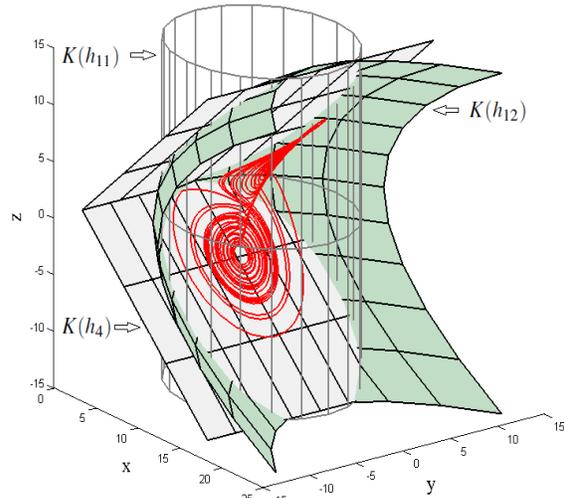


Fig. 2. Atractor caótico para el PMSM tipo magneto Interior delimitado por su conjunto de localización

Capítulo 4 y que fueron publicados en [1]. Se muestra cómo se puede diseñar un observador de Thau partiendo de una constante de Lipschitz obtenida a partir de las localizaciones; el observador de Thau por definición está construido para relacionar la parte lineal y la parte no lineal de un sistema dinámico. En el caso del sistema estudiado no se cumple la desigualdad de Thau, por lo que se propone una mejora por K. Starkov, que permite el diseño del observador bajo ciertas condiciones. Se realizaron simulaciones numéricas para comprobar la convergencia de los observadores diseñados.

4.1 Notas preliminares del observador de Thau

En esta sección se muestra el procedimiento para diseñar un observador de Thau. Considérese el sistema no lineal dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x) + Bu; \\ y &= Cx; \end{aligned} \tag{8}$$

donde, A, B, C , son matrices de $n \times n$, y $f(x)$ es la parte no lineal del sistema.

Existen algunas condiciones para que se pueda diseñar un observador de Thau para el

sistema (8), consulte Mahboobi *et al.* [15]: A, B, C y $f(\cdot)$ son conocidos y f es un campo vectorial globalmente Lipschitz $f(0) = 0$. Si (A, C) es observable, entonces, existe una K dada en que los valores propios de $A_0 = A - KC$ se encuentren en el semiplano izquierdo.

El observador de Thau está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + f(\hat{x}) + Bu + K(y - \hat{y}); \\ y &= C\hat{x}. \end{aligned} \tag{9}$$

Mientras A_0 sea estable, para cualquier matriz positiva dada Q , existe una matriz positiva definida única P , para la cual se satisface la ecuación de Lyapunov dada por:

$$A_0^T P + P A_0 = -2Q.$$

Si K se selecciona de tal modo que A_0 pueda satisfacer la ecuación de Lyapunov y ℓ satisface la siguiente desigualdad:

$$\ell < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\|P\|}; \tag{10}$$

donde ℓ es la constante de Lipschitz definida por:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \ell \|x_1 - x_2\|; \tag{11}$$

para toda x_1 y x_2 , entonces la dinámica del error para el observador de Thau es asintóticamente estable de forma global.

Para el sistema estudiado, la desigualdad (11) no se cumple, por esa razón se propone otra versión, dada por el siguiente teorema:

Teorema 3. Dada una matriz A_0 , que sea simétrica y estable, entonces en la construcción del observador de Thau, si se puede cumplir la condición:

$$\|P\| \leq \frac{\|A_0\|^{n-1}}{|\det(A_0)|} \leq \frac{2}{\ell}; \tag{12}$$

entonces el observador de Thau es *asintóticamente* estable.

**La prueba de este teorema se reserva para próxima publicación por parte de K. Starkov.

4.2 Obtención de la constante de Lipschitz para el modelo del PMSM

Utilizando la localización elipsoidal, obtenida en [1], se puede obtener la constante de Lipschitz para el sistema General del PMSM (2), tal como se calcula en [15],

Dada la localización elipsoidal:

$$\Theta := \left\{ p \left(x_1 - \frac{\beta_2}{p} \right)^2 + \beta_1 x_2^2 + x_3^2 \leq \frac{\beta_2^2}{p} \right\}; \tag{13}$$

donde $\beta_1 = p + \xi$ y $\beta_2 = a + c\beta_1$.

Entonces se calcula la constante de Lipschitz restringida en Θ para el sistema (2) que se nombra como $\ell(\Theta)$. Este procedimiento se toma del artículo de Mahboobi *et al.* [15], entonces a partir de (13) se puede encontrar:

$$\ell(\Theta) = \sqrt{\frac{2\beta_2^2}{p} + \frac{(\xi^2 + 1)\beta_2^2}{p\beta_1} + (\xi^2 + 1)\frac{4\beta_2^2}{p^2}};$$

se puede observar que existe un parámetro libre, $p > 0$. Dada la desigualdad de Thau, el mejor valor de $\ell(\Theta)$ es el más pequeño, ello se resuelve con máximos y mínimos, se selecciona un valor de $p = 1.5$; entonces con los parámetros dados por Jing *et al.* [5]: $a = 42.128$; $b = 0.7333$; $c = 164.78$; $\xi = 6.8172 \times 10^{-2}$; se obtiene:

$$\ell(\Theta) \leq 565.96. \tag{14}$$

Esta constante será útil para el diseño del observador de Thau.

4.3 Diseño del observador de Thau para el PMSM midiendo la velocidad

En esta sección se diseña un observador de Thau con la finalidad de estimar los estados, x_1 y x_2 (corrientes en el sistema), a partir de la medición del estado x_3 (velocidad).

Entonces se puede construir el observador de Thau con la matriz $A_0 = A - KC$ dada por:

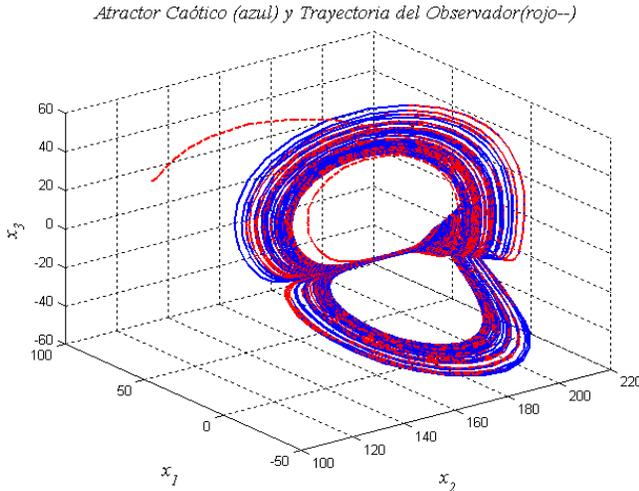


Fig. 3. Línea sólida: atractor caótico del sistema (2). línea punteada: observador (16)

$$A_0 = \begin{bmatrix} -b & 0 & -k_1 \\ 0 & -1 & c - k_2 \\ 0 & a & -a - k_3 \end{bmatrix}; \quad (15)$$

donde, para hacer simétrica la matriz A_0 y aplicar la desigualdad (12), se definen las constantes: $k_1 = 0; k_2 = c - a$. Para los parámetros dados por [5], con $k_3 = 2120$, se cumple la condición (12), que asegura la convergencia del observador.

El observador de Thau estará dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x_3 - b z_1 - k_1 z_3 + z_2 z_3 \\ z_3 (c - k_2) - z_2 + k_2 x_3 - z_1 z_3 \\ a z_2 - z_3 (a + k_3) + k_3 x_3 + \xi z_1 z_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

4.3.1 Simulación numérica

Se realizan simulaciones numéricas con la finalidad de comprobar los resultados. La Figura 3 muestra la convergencia del observador (16) al atractor caótico del sistema (2). La Figura 4 muestra la convergencia de $z_1 \rightarrow x_1, z_2 \rightarrow x_2$ y $z_3 \rightarrow x_3$. En la Figura 5 se muestra que el error converge a cero, y que el objetivo es alcanzado.

4.4 Diseño del observador de Thau midiendo las corrientes del PMSM

En esta sección se diseña un observador de Thau con la finalidad de estimar la Velocidad (x_3), a partir de la medición de las corrientes del motor, x_1 y x_2 .

Se realiza una modificación a la estructura original del sistema, para obtener una diferencia en la Matriz, $A_0 = A - KC$, se asigna:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_1 & k_4 \\ k_2 & k_5 \\ k_3 & k_6 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_5 & c \\ 0 & c & -a \end{bmatrix}.$$

Se definieron las constantes $k_2 = 0; k_3 = 0; k_6 = a - c; k_4 = 0$; con la finalidad de obtener una matriz simétrica; además para simplicidad en los cálculos se asignan $K_1 = b + k_1; K_5 = k_5 + 1$.

Para los parámetros dados por [5], con $K_1 = 700; K_5 = 100$; se cumple la condición (12), y se obtienen los valores $k_1 = 99.267; k_5 = 699$.

El observador estará dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x_1 - z_1 (K_1) + k_4 x_2 - k_2 z_2 + z_2 z_3 \\ c z_3 - z_2 (K_5) + k_2 x_1 - k_2 z_1 + k_5 x_2 - z_1 z_3 \\ c z_2 - a z_3 + k_3 x_1 + k_6 x_2 + \xi z_1 z_2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

4.4.1 Simulación numérica

Se realizan simulaciones numéricas con la x_3 finalidad de comprobar la convergencia del observador diseñado. La Figura 6 muestra la convergencia del observador (17) con el sistema del PMSM (2). La Figura 7 muestra la convergencia de las señales, $z_1 \rightarrow x_1; z_2 \rightarrow x_2; z_3 \rightarrow x_3$. La Figura 8 muestra la convergencia del error a cero, por lo tanto, se cumple el objetivo.

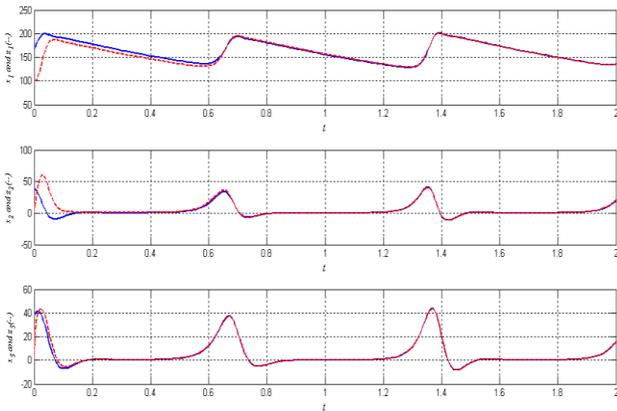


Fig. 4. Convergencia de las señales caóticas para el observador de Thau si se mide (16).

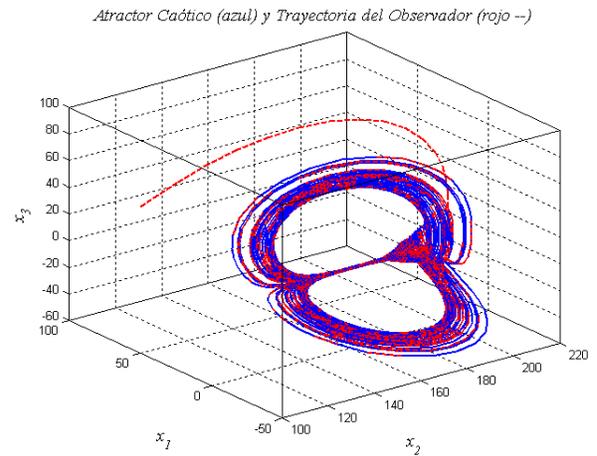


Fig. 6. Línea sólida: atractor caótico del sistema (2). línea punteada: observador (17)

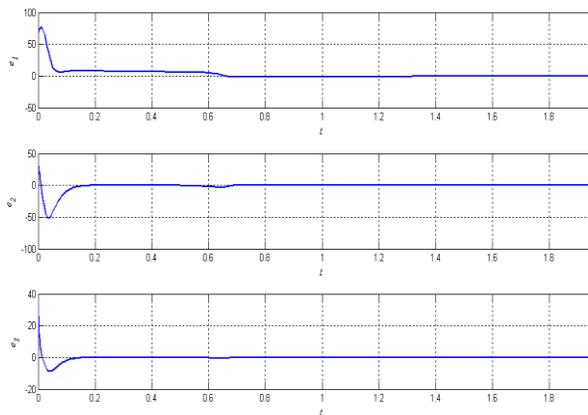


Fig. 5. Señales del error para el observador de Thau si se mide x_3 (16)

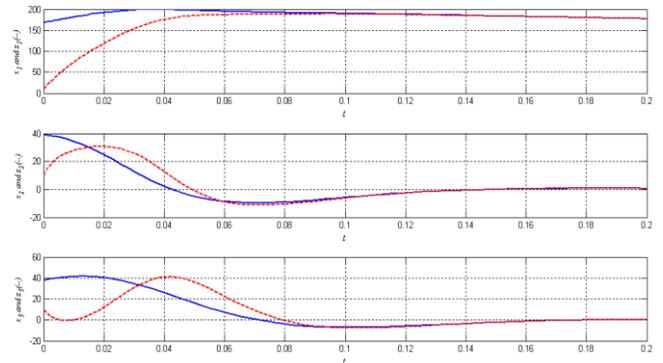


Fig. 7. Convergencia de las señales caóticas para el observador de Thau si se mide x_1 y x_2 (17)

5 Conclusiones

Se establece una localización elipsoidal para el modelo general del motor síncrono de imán permanente, calculándose todos los casos posibles de los valores extremos por medio del método del multiplicador de Lagrange.

Esa función localizadora tiene un parámetro libre y se reduce a un paraboloide elíptico que corta a un cilindro parabólico, con lo que se obtiene una localización compacta que mejora a la localización elipsoidal. En este caso se calculan las combinaciones posibles de estas

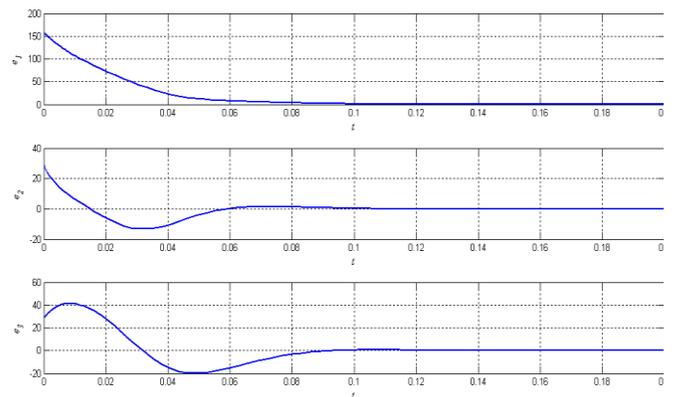


Fig. 8. Señales del error para el observador de Thau si se mide x_1 y x_2 (17)

superficies con el análisis de los valores extremos. La localización es mejorada con el uso de funciones adicionales, lo que resulta en una localización más precisa.

La localización obtenida para el modelo general (2), es válida para los casos especiales: en el caso del tipo magneto interior (3) se encuentran funciones adicionales y para el tipo superficie magnética (4) se pueden aplicar todos los resultados de localización anteriormente obtenidos en la literatura para el clásico sistema de Lorenz [10].

Los resultados de localización de conjunto compactos invariantes para el PMSM son aplicados con éxito para el diseño de observadores de Thau. Ello fue logrado por medio del cálculo de la constante de Lipschitz, basándose en los resultados de localización.

El diseño del observador de Thau no fue resuelto directamente con la desigualdad original de Thau, se recurrió a una desigualdad propuesta por K. Starkov, que permite resolver el problema de estabilidad por medio de un método alterno.

Las simulaciones numéricas corroboran las características dinámicas del modelo así como la convergencia de los observadores propuestos.

Los observadores pueden utilizarse para casos prácticos del PMSM; en general, para eliminar sensores o para monitoreo del estado físico del motor.

Agradecimientos

El trabajo de tesis doctoral fue realizado en el marco del proyecto SEP-CONACYT 78890 y el proyecto DGEST TIJ-IET-2009-217.

Referencias

1. Coria, L.N. & Starkov, K.E. (2009). Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14 (11), 3879–3888.
2. Fitzgerald, A.E., Kingsley, C., & Umans, S.D. (1990). *Electric machinery*. New York: McGraw-Hill.
3. Gao, Y. & Chau, K.T. (2003). Design of permanent magnets to avoid chaos in PM synchronous machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39 (5), 2995–997.
4. Hemati, N. (1994). Strange attractors in brushless DC motors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 41(1), 40–45.
5. Hemati, N. & Kwatny, H. (1993). Bifurcation of equilibria and chaos in permanent-magnet machines. *32nd IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, TX, USA, 1, 475–479.
6. Jing, Z., Yu, C., & Chen, G. (2004). Complex dynamics in a permanent-magnet synchronous motor model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 22(4), 831–848.
7. Khalil, H.K. (1996). *Nonlinear systems (2nd ed.)*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
8. Krishchenko, A.P. (1997). Estimation of domains with cycles. *Computers & Mathematics with Applications*, 34(2-4), 325–332.
9. Krishchenko, A.P. & Starkov, K.E. (2006). Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with applications to the Lanford system. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 16(11), 3249–3256.
10. Krishchenko, A.P. & Starkov, K.E. (2006). Localization of compact invariant sets of the Lorenz system. *Physics Letters A*, 353(5), 383–388.
11. Krishchenko, A. & Starkov, K. (2007). Estimation of the domain containing all compact invariant sets of a system modelling the amplitude of a plasma instability. *Physics Letters A*, 367(1-2), 65–72.
12. Krishchenko, A.P. & Starkov, K.E. (2008). Localization of compact invariant sets of nonlinear time-varying systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(5), 1599–1604.
13. Kuroe, Y. & Hayashi, S. (1989). Analysis of bifurcation in power electronic induction motor drive system. *20th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC'89)*, Milwaukee, WI, USA, 923–930.
14. Li, Z., Park, J.B., Joo, Y.H., Zhang, B., & Chen, G. (2002). Bifurcations and chaos in a permanent-magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3), 383–387.
15. Mahboobi, S.H., Shahrokh, M., & Pishkenari, H.N. (2006). Observer-based control design for three well-known chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 29(2), 381–392.
16. Márquez, H.J. (2003). *Nonlinear control systems: analysis and design*. Hoboken, N.J.: John Wiley.
17. Pikovskii, A.S., Rabinovich, M.I., & Traktengerts, V.Y. (1978). Onset of stochastic in

decay confinement of parametric instability. *Soviet Physics – JETP*, 47(4), 715–719.

18. **Starkov, K.E. (2007).** Estimation of the domain containing all compact invariant sets of the optically injected laser system. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 17(11), 4213–4217.
19. **Starkov, K.E. (2009).** Bounding a domain that contains all compact invariant sets of the Bloch system. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 19(3), 1037–1042.
20. **Starkov, K.E. (2009).** Bounds for a domain containing all compact invariant sets of the system describing the laser- plasma interaction. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39(4), 1671–1676.
21. **Starkov, K. & Coria, L.N. (2005).** Examples of localization of periodic orbits of polynomial systems. *2005 International Conference Physics and Control, Saint Petersburg, Russia*, 606–609.
22. **Starkov, K.E. & Coria, L. (2005).** Localization of periodic orbits of polynomial systems with one or two quadratic monomials. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 6(3), 271–277.
23. **Starkov, K.E. & Krishchenko, A.P. (2005).** Localization of periodic orbits of polynomial systems by ellipsoidal estimates. *Chaos, Solitons and Fractals*, 23(3), 981–988.
24. **Starkov, K.E. & Starkov Jr., K., K. (2007).** Localization of periodic orbits of the Rössler system under variation of its parameters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 33(5), 1445–49.
25. **Strogatz, S.H. (1994).** *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Reading, Mass.: Addison Wesley.
26. **Yu, P. & Liao, X. (2006).** Globally attractive and positive invariant set of the Lorenz system. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 16(3), 754–764.



Luis Nestor Coria de los Rios

obtiene el grado de Ingeniero en Electrónica con medalla al mérito académico en el Instituto Tecnológico de Durango en el 2000, estudió la Maestría con Especialidad en Sistemas Digitales en el CITEDIPN en 2005. Obtuvo el grado de Doctor en Comunicaciones y Electrónica con Mención Honorífica y Reconocimiento al Desempeño Académico en el Instituto Politécnico Nacional en

el 2010. Actualmente se desempeña como Profesor Investigador y Jefe de Proyectos de Investigación en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del Instituto Tecnológico de Tijuana.



Konstantin E. Starkov

Nació en Moscú, Rusia en 1950. En 1983 recibe el grado Candidato en Ciencias (Equivalente a PhD) en el Instituto de Ciencias en Control en Moscú, Rusia. En 1995 obtiene el grado de Doctor en Ciencias Física y Matemáticas en el mismo Instituto. En la actualidad de desempeña como Profesor Investigador en CITEDIPN. El Dr. Starkov es autor de más de 100 publicaciones en teoría de sistemas matemáticos y en otras áreas.

Artículo recibido el 26/01/2011; aceptado el 10/08/2011.