Visibilidad de Alcance Limitado en Polígonos Escalera

Visibility of limited range in staircase polygons

Santiago Canales Cano[1] and Gregorio Hernández Peñalver[2]
[1]Universidad Pontificia Comillas de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, (ICAI)
Departamento de Matemática Aplicada y Computación
scanales@dmc.icai.upcomillas.es
[2]Universidad Politécnica de Madrid, Facultad de Informática
Departamento de Matemática Aplicada
gregorio@fi.upm.es

Artículo recibido en Enero 07, 2008; aceptado en Mayo 28, 2008

Resumen
La definición de visibilidad en el Problema de Galerías de Arte utiliza guardias o luces que pueden ver o iluminar sin limitación en el alcance. En este artículo consideramos luces que tienen un alcance limitado L. Presentamos algunos resultados sobre polígonos escalera con luces situadas en sus vértices. En el resultado principal se demuestra que si P es un polígono escalera con n vértices, $\lfloor n/4 \rfloor + O(1)$ luces vértice de alcance L son siempre suficiente y a veces necesarias para iluminar P con $L \in [r/2, r)$, donde r es el radio de P.
Palabras clave: Visibilidad, Alcance limitado, Polígono escalera, Iluminación.

Abstract
The usual definition of visibility in Art Gallery Problems uses guards or light sources that can watch or illuminate with unlimited range. In this paper we consider light sources having a limited range L. We present some results about staircase polygons with light sources placed in its vertices. The main result that we prove is that if P is a staircase polygon of n vertices, then $\lfloor n/4 \rfloor + O(1)$ vertex light sources with range L are always sufficient and sometimes necessary to illuminate P when $L \in [r/2, r)$, where r is the radius of P.
Keywords: Visibility, Limited range, Staircase polygons, Illumination.

1 Introducción

El problema original de la Galería de Arte 8 propuesto por V. Klee y que preguntaba cuántas luces son suficientes para iluminar todo punto interior a un polígono P con n vértices, abrió un nuevo campo en Geometría Computacional. En este nuevo campo se engloban todos los problemas que de alguna manera están relacionados con la iluminación o vigilancia de cualquier estructura o elemento geométrico. El problema propuesto por V. Klee fue solucionado por Chvátal, quien demostró que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias o luces son siempre suficientes y a veces necesarias 3 para iluminar un polígono P con n vértices. Además muchas variaciones de este teorema han sido ya estudiados como podemos comprobar en 7 y 8.

La Visibilidad o Iluminación clásica no introduce el concepto de limitación en el alcance para la vigilancia o iluminación de guardias o luces respectivamente. Esta situación no es en absoluto real, pues los mecanismos de iluminación que se utilizan no tienen un alcance ilimitado. Por tanto, tiene sentido introducir un concepto de visibilidad o iluminación donde el alcance esté limitado a una distancia *L;* concepto que aparece en 4 y que se estudia bajo el punto de vista de rutas de vigilancia en 5 y 6. Formalizaremos a continuación estos conceptos que evidentemente estarán relacionados con el alcance de iluminación *L*, alcance medido siempre con la distancia euclídea.

En esta situación aparecen preguntas combinatorias y algorítmicas de gran interés, como pueden ser, por ejemplo: ¿Cuál es el alcance mínimo de *L* para que situando una luz en cada vértice del polígono quede iluminado todo el polígono? ¿Para qué valores de *L* se puede iluminar todo el polígono? Dada una longitud *L*, ¿cuál es el

ISSN 1405-5546

número mínimo de luces vértice, (luces situadas en los vértices de un polígono), de alcance *L* que iluminan todo el polígono?

En este artículo damos respuesta a algunas de estas preguntas empezando por definir la visibilidad de alcance limitado y estudiando los problemas planteados anteriormente para un tipo concreto de polígonos, a saber, los Polígonos Escalera. Es importante destacar que la visibilidad en este tipo de polígonos, ya ha sido analizada desde el punto de vista de grafos de visibilidad en 1 y 2.

2 Definiciones

Definiremos en primer lugar lo que se entiende por puntos visibles con alcance *L* y después daremos algunas definiciones particulares para polígonos escalera.

2.1. Definición: Visibilidad de alcance *L*

Dos puntos x e y se dicen visibles con alcance L en un polígono P, si el segmento xy está contenido completamente en P y la distancia entre los puntos satisface $d(x, y) \leq L$ *, (ver Fig.* **1***).*

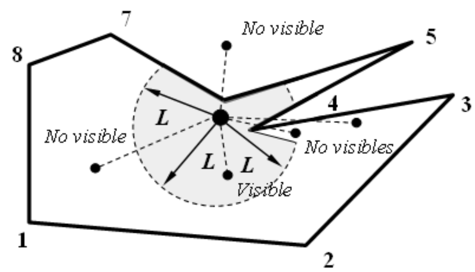

Fig. 1. Visibilidad de alcance L

Una vez que conocemos el concepto de visibilidad *limitada* o de *alcance limitado* veamos las definiciones propias de los polígonos escalera.

2.2. Definición: Polígono escalera

Se denomina polígono escalera a todo polígono ortogonal,(es decir de lados únicamente horizontales y verticales), P *, tal que existe un lado horizontal h (respectivamente vertical v), cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de los restantes lados horizontales (respectivamente verticales). Designaremos con la notación* $P(V, a_1, a_2, ..., a_m)$ *al polígono escalera en el que V es la intersección de h y v y* $a_1, a_2, ..., a_m$ *son los restantes vértices convexos, (vértices de ángulo interior al polígono inferior a π).*

Así si llamamos b_i, $i = 1, 2, ..., m$-3 al vértice cóncavo, (vértice de ángulo interior al polígono superior a *π*), cuya abcisa es la abcisa del vértice a_{i-1} y cuya ordenada es la del vértice a_{i+2}, se tiene:

$$\overline{a_1 a_2} + \sum_{i=1}^{m-3} \overline{b_i a_{i+2}} = \overline{V a_m} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m-3} \overline{b_i a_{i+1}} + \overline{a_{m-1} a_m} = \overline{V a_1} \tag{1}$$

como se muestra en la Fig. 2**.**

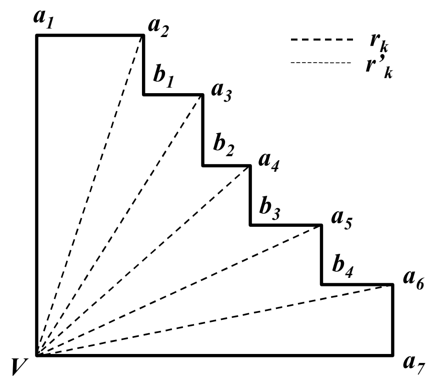

Fig. 2. Polígono escalera

2.3. Definición: Radio de una escalera

Dado un polígono escalera $P(V, a_1, a_2, ..., a_m)$ *se llaman radios exteriores de P y se denotan por* r_k *a los segmentos* $\overline{Va_k}$ $\forall k = 1, 2, ..., m$. *Se llama radio de P y denota por r al máximo de los radios exteriores de P.*

$$r = \max_{k \in \{1,...,n\}} r_k \tag{2}$$

Para comprender bien la definición anterior podemos ver la Fig. 2 donde se dibujan los radios exteriores de un polígono *escalera*. Pasamos a estudiar ahora la iluminación de *alcance limitado* en este tipo de polígonos, considerando que las luces se sitúan sobre los vértices del polígono, es decir considerando *luces-vértice* y no *luces-punto*.

3 Visibilidad de Alcance Limitado en Escaleras

El problema combinatorio que planteamos en este artículo respecto a los polígonos *escalera* consiste básicamente en encontrar el número mínimo de *luces-vértice* necesarias para iluminar el polígono. Evidentemente dado que estamos estudiando la visibilidad de *alcance limitado*, esta cota dependerá del alcance *L* de iluminación. Formalmente el problema se puede enunciar de la siguiente manera:

Número de luces-vértice de alcance *L* que iluminan un polígono escalera
Entrada: Un polígono escalera *P* de *n* vértices y un alcance de iluminación *L*.
Pregunta: ¿Cuál es el número mínimo de *luces-vértice* de alcance *L* necesarias para iluminar el polígono *P*?

Si el alcance de iluminación *L* es suficientemente grande el polígono se podrá iluminar con una sola luz. Así si tomamos $L \geq r$, donde *r* es el radio del polígono, colocando una luz en el vértice V tendremos iluminado todo el polígono. Planteamos previamente otro problema distinto, permitiendo colocar una luz en cada vértice y preguntándonos por el mínimo alcance de iluminación ($L_{\min}$), necesario para iluminar todo el polígono.

3.1. Alcance mínimo

Dado un polígono escalera *P*, se define $L_{\min}$ como el valor más pequeño para el que colocando luces de alcance L_{min} en todos los vértices del polígono *P*, éste quede totalmente iluminado. Por tanto, el intervalo de valores significativos para el alcance resulta ser $[L_{\min}, r]$, y por consiguiente el primer problema que se plantea y al que damos respuesta en el siguiente proposición, es el cálculo de $L_{\min}$.

Proposición 3.1 *Dado un polígono escalera* $P(V, a_1, a_2, ..., a_m)$ de radio *r, se tiene que* $L_{\min} = r/2$.

Demostración. Resulta claro, observando la Fig. 3, que si tomamos $L=(r/2)-\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0$, siempre podemos encontrar un polígono escalera P_ε que no es posible iluminar colocando una luz de alcance L en cada uno de sus vértices.

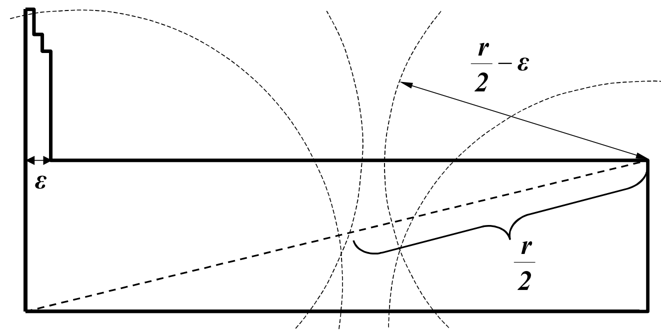

Fig. 3. Ilustración de P_ε

Probemos ahora que todo polígono escalera P de radio r se ilumina con luces vértice colocando en cada vértice una luz de alcance $r/2$. Para ello descomponemos el polígono en cuñas uniendo cada vértice con V, como en la Fig. 4, observando que para iluminar P basta iluminar cada una de esas cuñas. Ahora bien, las cuñas son de dos tipos: aquellas en que uno de sus tres lados es un lado horizontal del polígono y que llamaremos *tipo H* y aquellas en que uno de sus tres lados es un lado vertical del polígono y que llamaremos *tipo V.* Tanto en cuñas de tipo H como en las de tipo V, la longitud del lado más grande de la cuña es como máximo r. Así si llamamos z al punto medio del lado mayor de cada cuña, la distancia de cada vértice de la cuña al punto z es siempre menor o igual que $r/2$, con lo que probamos que siempre podemos iluminar las cuñas colocando luces de alcance $r/2$ en todos sus vértices y, por tanto, también podemos iluminar todo el polígono.

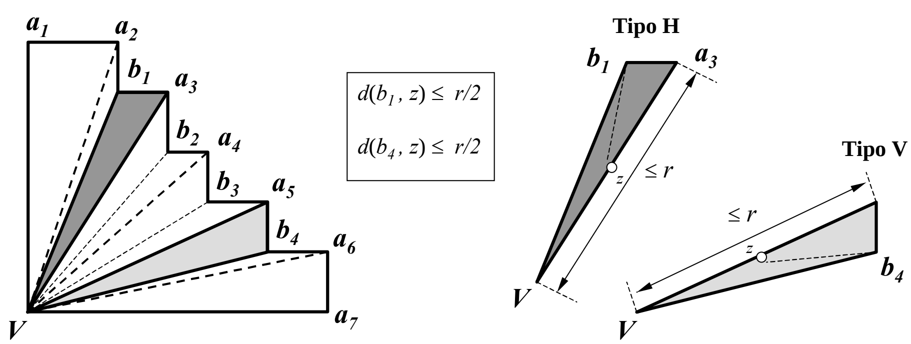

Fig. 4. Cuñas de un polígono escalera

Ya sabemos, por tanto, que colocando luces de alcance $r/2$ en todos los vértices de P iluminamos todo el polígono. Pero, intentemos dar respuesta al problema fundamental de este artículo: ¿cuántas luces vértice necesitamos para iluminar todo el polígono con un alcance de iluminación L? Evidentemente esta distancia L debe pertenecer al intervalo de valores significativos para el alcance, $[L_{\min}, r]$.

Si $L=r$, podemos iluminar todo el polígono colocando una luz en V. ¿Cuántas luces son necesarias si $L\in[L_{\min}, r)$?

3.2. Luces vértice con alcance *L*

Todo polígono escalera P con n vértices, se puede iluminar con una solo luz de alcance r. ¿Qué ocurre si disminuimos una cantidad pequeña el alcance L? Esta cuestión la estudiamos en el Lema 3.3, pero previamente analizamos algunas propiedades que son necesarias para la demostración del Teorema 3.5 que caracteriza el número de luces para iluminar el polígono P en función de L.

Lema 3.2 *Los vértices V,* a_1 y a_m son necesarios en algunos casos para iluminar el polígono P con luces de alcance $r/2$.

Demostración. Si nos fijamos en el polígono de la Fig. 5, es claro que para iluminarlo con una luz de alcance $r/2$, necesitamos al menos colocar luces en los vértices V, a_1 y a_m, ya que en otro caso el polígono no quedaría iluminado. Claramente la situación extrema será el rectángulo en cuyo caso necesitamos como mínimo colocar 4 luces de alcance $r/2$, en cada uno de sus vértices.

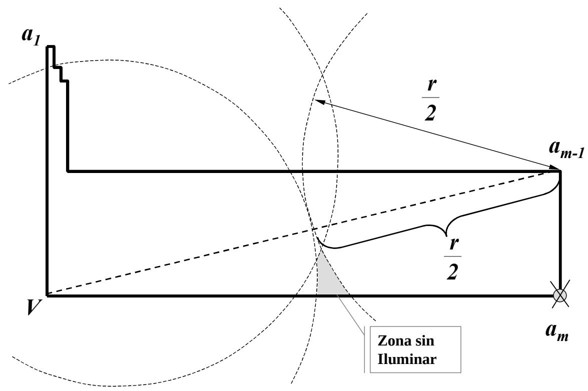

Fig. 5. Zona sin iluminar desde a_m

Ya hemos visto en el ejemplo anterior que los vértices V, a_1 y a_m son a veces necesarios para iluminar el polígono escalera P, cuando el alcance de iluminación es $L_{\min}$. En el siguiente lema analizamos que ocurre cuando las luces que situamos en los vértices del polígono son de alcance muy próximo a r, es decir, cuando $L = r - \varepsilon$, con ε tan pequeño como deseemos.

Lema 3.3 *Si* ε *es suficientemente pequeño,* $n \geq 8$ *y* $L = r - \varepsilon$*, entonces existe un polígono escalera* $P(V, a_1, a_2, ..., a_m)$ *de n vértices que necesita* $\lfloor n/4 \rfloor + 2$ *luces de alcance* L *para ser iluminado.*

Demostración. Consideramos el polígono de la Fig. 6, donde todos los vértices convexos a_i, $i = 2,...,m-1$ de P se encuentran a distancia r de V. Es obvio que desde V no se ilumina el fondo de ninguna cuña si $L = r - \varepsilon$. Desde cada vértice cóncavo se ilumina solo sus cuñas adyacentes, por tanto, necesitamos colocar luces en los vértices cóncavos alternadamente. Así, como el número de vértices cóncavos es $(n/2) - 2$, el número de luces es:

$$\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 2\right) \right\rfloor + 3 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2 \tag{3}$$

donde el 3 corresponde a los vértices de V, a_1 y a_m.

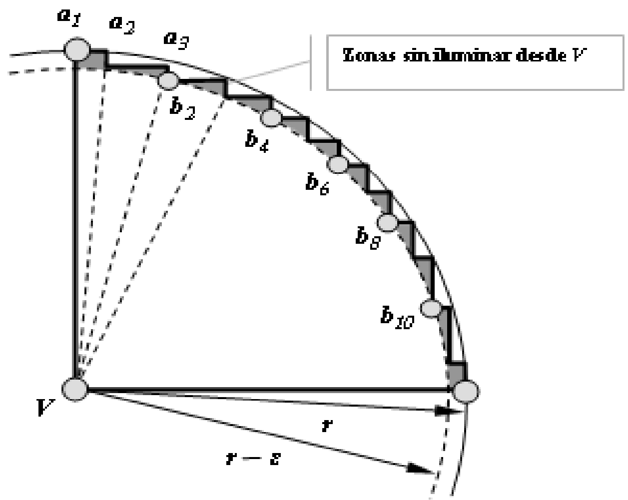

Fig. 6. Visibilidad desde V con $L = r - \varepsilon$

Podemos preguntarnos ahora por el número de luces necesarias para iluminar un polígono escalera P con n vértices, cuando el alcance de iluminación toma el valor inferior en el intervalo significativo, es decir, cuando $L = r/2$. Demostramos en el siguiente lema que existen polígonos escalera en este caso, que necesitan $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ luces para ser iluminados.

Lema 3.4 *Si* $L = r/2$*, entonces existe un polígono escalera* $P(V, a_1, a_2, ..., a_m)$ *de n vértices que necesita* $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ *luces de alcance L para ser iluminado.*

Demostración. En la Fig. 7 tenemos un ejemplo de un polígono escalera que se ha construido agrupando sus peldaños de la siguiente manera: tenemos cuatro grupos de peldaños con k vértices cóncavos, siendo k par y tal que el último vértice cóncavo de cada grupo dista más de $r/2$ del primero del siguiente grupo. Cada grupo necesita $(k/2)+1$ luces para ser iluminado. Por tanto si tenemos en cuenta que necesitamos situar una luz también en V, el número de focos será:

$$4\left(\frac{k}{2}+1\right)+1 = 2k+5 \tag{4}$$

Como P tiene $4k$ vértices cóncavos, se verifica que $4k = (n/2) - 2$, o lo que es igual $2k = (n/4) - 1$. Sustituyendo en (4) tenemos:

$$\frac{n}{4} - 1 + 5 = \frac{n}{4} + 4 \tag{5}$$

Si para alguno de los tramos el número de cóncavos k es impar, entonces n no es múltiplo de 4, pero no aumenta el número de luces, resultando que dicho número es $\lfloor n/4 \rfloor + 4$.

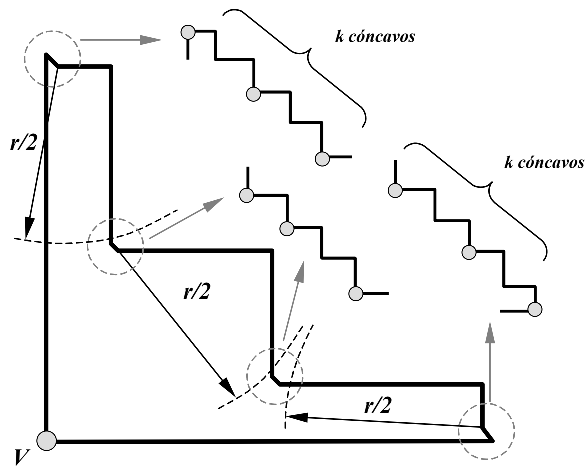

Fig. 7. P necesita $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ luces vértice de alcance $L = r/2$

Una vez analizadas las luces a veces necesarias para iluminar P para $L = r - \varepsilon$ y $L = r/2$, ya podemos estudiar de forma conjunta el número de luces necesarias y suficientes para iluminar el polígono P. Evidentemente este número depende de L, pues por ejemplo si $L = r$ el polígono se iluminará colocando una luz en el vértice V y otro caso esta circunstancia no será cierta. En el siguiente teorema analizamos el número de luces necesarias y suficientes para iluminar completamente P, en función del alcance de iluminación L.

Teorema 3.5 *Para todo polígono escalera P con n vértices, el número de luces vértice de alcance L, a veces necesarias y siempre suficientes para iluminarlo son:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ L = r \\ \lfloor n/4 \rfloor + O(1) & si\ (r/2) \le L < r \end{array} \right\} \tag{6}$$

Demostración. El caso $L = r$ es evidente colocando una luz en V. En el Lema 3.3 hemos visto que al rebajar ligeramente el alcance, podemos llegar a necesitar un número de luces igual a $\lfloor n/4 \rfloor + 2$. Para terminar la demostración basta comprobar que $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ luces de alcance $r/2$ son suficientes para iluminar cualquier polígono escalera de n vértices. Por el Lema 3.2 tendremos siempre tres luces en los vértices V, a_1 y a_m.

Como se puede observar en la Fig. 8, colocando luces de alcance $L = r/2$ en V, a_1, a_m y en los vértices cóncavos alternos, (lo que supone un total de $\lfloor n/4 \rfloor + 2$ luces), puede quedar totalmente iluminado el polígono P.

Sin embargo, esta "buena" situación respecto a la iluminación no siempre se verifica, pudiendo darse casos "desfavorables", que aumentarán el número de luces y que analizamos a continuación.

- **Caso 1: Existen zonas interiores a peldaños sin iluminar con luces de alcance superior a $r/2$, situadas en cóncavos alternos, (es decir, existen vértices cóncavos consecutivos que distan más de $r/2$ o peldaños de anchura o altura superior a $r/2$).**

  Según se muestra en las Fig. 7 y 9 (a) puede suceder que al colocar luces en los vértices cóncavos alternos no quede totalmente iluminado el polígono, si la distancia entre los dos vértices cóncavos que determinan un peldaño es superior a $L = r/2$.

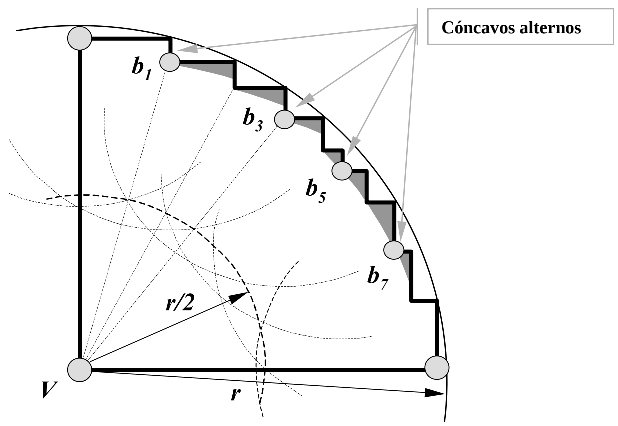

Fig. 8. Iluminación de P con vértices cóncavos, V, a_1 y a_m

Notemos que esta situación se puede producir como máximo tres veces, pues si dibujamos peldaños cuya diagonal, (el segmento que une los extremos del peldaño), mida más $r/2$, haciendo dos de ellos de altura/anchura tan pequeña como se quiera, quedará a uno de sus lados o en el centro de ambos una longitud en la que no podemos colocar más que otro peldaño de altura o anchura superior a $r/2$. Para solucionar esta situación, es necesario colocar luces en ambos vértices cóncavos, lo que puede determinar dos vértices adicionales. Por otra parte como se muestra en la Figura 9 (b), si un peldaño de P tiene anchura o altura superior a $r/2$, puede suceder que necesitemos también colocar una luz en el vértice convexo de dicho peldaño. Sin embargo esta situación solamente se puede presentar una vez, pues si la altura y anchura del peldaño es superior a $r/2$ en los peldaños superiores e inferiores no podremos reproducir esta situación.

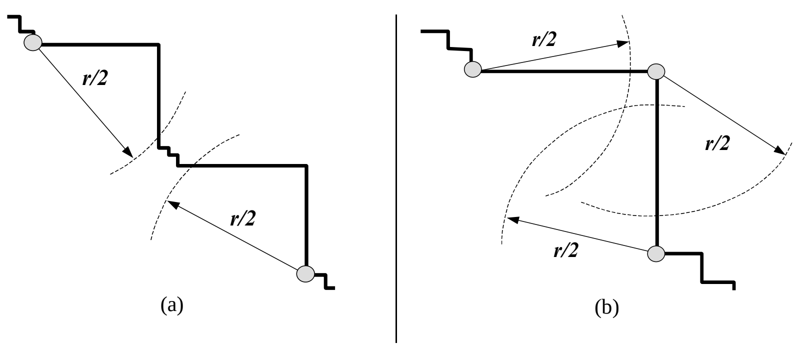

Fig. 9. Situaciones de peldaños desfavorables

Por tanto, el número de luces de alcance $r/2$ suficientes para iluminar P es:

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2 + 2 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 4 \tag{7}$$

- **Caso 2: Existen zonas interiores a P, (exteriores a peldaños), sin iluminar con luces de alcance superior a $r/2$, situadas en cóncavos alternos.**
  En este caso, como se muestra en la Figura 10, pudiera suceder que colocando luces de alcance $r/2$ en V y en dos vértices cóncavos alternos, b_k y b_{k+2} no se ilumina una zona de P. Colocando una luz en el vértice

intermedio b_{k+1} y colocando alternadamente luces en los vértices cóncavos a partir de él, quedará iluminado el polígono. ¿Cuántas veces se puede dar la situación anterior? En el peor de los casos esta situación se repetirá dos veces y podrá producir que necesitemos colocar una luz más en un vértice cóncavo, por el orden de colocación de luces en dichos vértices. Por tanto el número de luces suficientes para iluminar sigue siendo:

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2 + 1 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3 \tag{8}$$

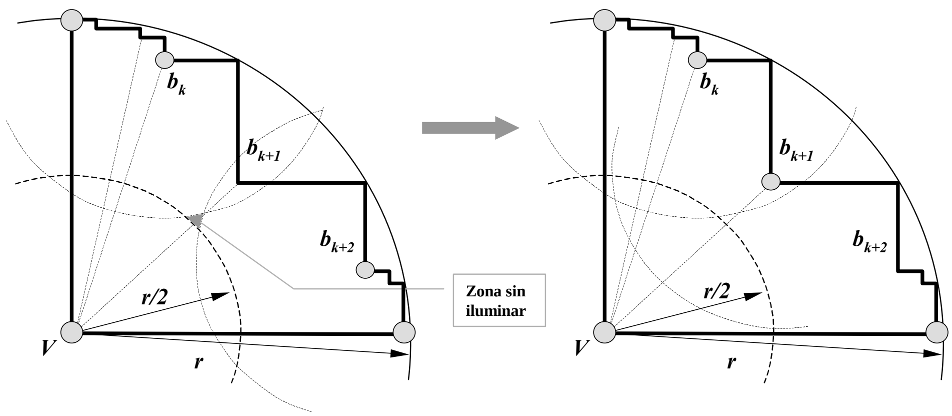

Fig. 10. Existen zonas interiores a P sin iluminar

Por otra parte podemos tener situaciones en las que tengamos un peldaño desfavorable del Caso 1 y otro del Caso 2, pero solamente se puede dar uno de cada situación, con lo que el número de luces suficientes para iluminar P seguirá siendo $\lfloor n/4 \rfloor + 4$.

4 Conclusiones

Hemos estudiado en este artículo algunos aspectos de la visibilidad de *alcance limitado* en polígonos *escalera*. Se demuestra que el intervalo de valores significativos para el alcance L en dichos polígonos es $[r/2, r]$, donde r es el radio del polígono. Además se prueba que $\lfloor n/4 \rfloor + O(1)$ es el número de luces a veces necesario y siempre suficiente para iluminar cualquier polígono escalera, cuando el alcance $L \in [r/2, r)$. Queda pendiente el estudio de otros tipos de polígonos ortogonales, como pueden ser los polígonos pirámide, y de la iluminación con luces no situadas en los vértices del polígono, pudiendo añadir como elemento interesante a analizar el estudio de este tipo de iluminación considerando métricas distintas a la euclídea, para medir el alcance de iluminación.

Un trabajo también interesante y pendiente sería el análisis de este problema usando técnicas aproximadas y heurísticas, como podrían ser por ejemplo, las técnicas basadas en simulated annealing o algoritmos genéticos.

5 Referencias

1. **Abello, J., Egecioglu, O.** Visibility Graphs of Staircase Polygons with Uniform Step Length, Int. J. Comput. Geometry Appl. 3 (1993), 27-37.
2. **Abello, J., Egecioglu, O.; Kumar K.** Visibility Graphs of Staircase Polygons and the Weak Bruhat Order, I from Visibility Graphs to Maximal Chains, Discrete & Computational Geometry 14 (1995), 331-358.
3. **Chvátal, V.** A Combinatorial Theorem in Plane Geometry , Journal of Combinatorial Theory, Serie B, 18, pp. 39-41, 1975.

4. **García, J.** Problemas Algorítmicos-Combinatorios de Visibilidad, Tesis Doctoral, UPM, 1995.
5. **Ntafos, S.** Watchman routes under limited visibility , Proc. 2nd Canad. Conf. Comput. Geom., 1990.
6. **Ntafos, S.** Watchman routes under limited visibility, Comput. Geom. Theory Appl., 1992.
7. **O'Rourke, J.** Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press, 1987.
8. **Urrutia, J.** Art Gallery and Illumination Problems en Handbook on Computational Geometry, Elsevier (J. R. Sade and J. Urrutia ed.), 1999.

Santiago Canales Cano *Doctor en Informática por la Universidad Politécnica de Madrid, (2004) y Licenciado en CC Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid, (1994). Sus líneas de investigación son la Geometría Computacional y la Matemática Discreta y más concretamente las técnicas heurísticas en problemas geométricos de naturaleza NP-dura, (vigilancia o iluminación). Desde 1996 es profesor del Departamento de Matemática Aplicada y Computación de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería, (ICAI), perteneciente a la Universidad Pontifica Comillas de Madrid.* *http://www.upcomillas.es/personal/scanales*

Gregorio Hernández Peñalver *Doctor en CC Matemáticas por la Universidad Complutense (1984). Profesor titular de la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid desde 1988. Sus áreas de interés son la Matemática Discreta y la Geometría Computacional y especialmente la Teoría de Grafos en la primera disciplina y los problemas de Iluminación y Vigilancia en el campo de la Geometría Computacional. En ambas áreas es autor de multitud de artículos y libros publicados, y de ponencias y comunicaciones en congresos nacionales e internacionales.* *http://www.dma.fi.upm.es/gregorio*